# الفصل 3

الدوائر

ستُفترض الموضوعات والخصائص الرياضية من الفصلين 1 و2 ولن يُستشهد بها عمومًا. هذه قاعدة سنطبقها على الفصول اللاحقة، مع مراعاة ما يقتضيه اختلاف الحال.

**ملحوظة.** لم تعد الهندسة الحديثة تستخدم تعريفات إقليدس للمنحنيات والمماسات وما إلى ذلك. ومع ذلك، هذه التعريفات تكفي غرضنا من هذا الكتاب.

## 3-1󠄀 التعريفات

1- الدوائر المتساوية هي التي لها أنصاف أقطار متساوية.

2- **وتر الدائرة** هو قطعة تتقاطع مع محيط الدائرة في نقطتين. إذا مُد الوتر لإنشاء خط، فإن هذا الخط يسمى **قاطع**، ويسمى كل جزء من جزأي المحيط الناتجين من تقسيم القاطع لمحيط الدائرة **بالقوس** - يسمى الأكبر **بالقوس المترافق الأكبر**، ويسمى الأصغر **بالقوس المترافق الأصغر**.

3- يُقال إن قطعة أو شعاع أو خط مستقيم يمس دائرة عندما يتقاطع مع محيط الدائرة عند نقطة فقط. يُطلق على القطعة أو الشعاع أو الخط المستقيم **مماس الدائرة**، وتسمى النقطة التي يمس فيها المحيط **بنقطة التقاطع**.

Diagram

Description automatically generated with low confidence

الشكل 3-1-1: [تعريف 3-3] يمس عند ؛ أو مماس لـ 󠄀 و هي نقطة التقاطع بين 󠄀 و .

4- يُقال إن دائرتين تمسان بعضهما البعض عندما تتقاطعان في نقطة فقط.

هناك نوعان من التماس:

أ) عندما تكون إحدى الدائرتين خارج الأخرى.

ب) عندما تكون إحدى الدائرتين داخل الأخرى.

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-1-2: **على اليسار**: [تعريف 3-4] الدائرتان و تتماسان خارجيًا عند ، بينما الدائرتان و تتماسان داخليًا عند . **على اليمين:** [تعريف 3-5] الوتر للدائرة يقسم الدائرة نفسها إلى قطعين و . القطع (المظلل) يحده الوتر والقوس ، والقطع (غير المظلل) يحده الوتر والقوس .

5- **القطع الدائري** هو شكل ثنائي الأبعاد يحده وتر وقوس ويشتمل على نهايتي الوتر.

6- يقال إن الأوتار متساوية البعد عن المركز عندما تكون الأعمدة المبنية عليها من المركز متساوية الطول.

7- **الزاوية علي قطع** هي الزاوية المستقيمة المحصورة بين وترين يتقاطعان عند نفس النهاية على محيط الدائرة. في الشكل 3-1-3، هي زاوية على قطع. راجع أيضًا [3-21].

8- **زاوية القطع** هي الزاوية غير المستقيمة المحصورة بين وتر القطع والمماس عند أي من النهايتين. في الشكل 3-1-3، القوس هو زاوية القطع . هذه الزوايا تظهر فقط في البرهان الأصلي لـ [3-16].

9- الزاوية على القطع يقال إنها تقف على قوسها المترافق.

10- الأقواس المتشابهة هي التي تحصر زوايا متساوية.

11- يتكون **قطاع الدائرة** من نصفي قطر والقوس المحصور بينهما. في الشكل 3-1-3، ، نصف القطر ، ونصف القطر يُشكلان القطاعين و .

Chart, radar chart

Description automatically generated

الشكل 3-1-3: [تعريف 3-8]و [تعريف 3-9] و [تعريف 3-11]

12- **الدوائر متحدة المركز** هي الدوائر التي لها نفس المركز.

13- النقاط التي تقع على محيط نفس الدائرة يقال إنها **تقع على نفس الدائرة**.

14- الشكل **الرباعي الدائري** هو شكل رباعي مدرج في دائرة.

15- تعريف حديث للزاوية: **الزاوية** في الهندسة هي الشكل الذي يتكون من شعاعين، يُطلق عليهما ضلعي الزاوية، ويشتركان في نهاية، تسمى **رأس الزاوية**. مقياس الزاوية هو النسبة بين طول القوس الدائري ونصف قطره، بحيث يكون القوس متمركز عند الرأس ومحدود بالضلعين.

**حجم الزاوية** هو أقل دوران يلزم لينطبق أحد ضلعيها على الآخر. الزوايا التي لها نفس الحجم تسمى **زوايا متطابقة**.

Diagram

Description automatically generated with low confidence

الشكل 3-1-4: قياس الزاوية هو حاصل قسمة على .

من أجل قياس الزاوية ، يُنشئ قوس دائري متمركز عند رأس الزاوية، على سبيل المثال، بفرجار. ثم يُقسم طول القوس على نصف قطر القوس ، وربما يُضرب في ثابت التدريج (الذي يعتمد على وحدات القياس المختارة):

قيمة مُعرّفة بحيث تكون مستقلة عن حجم الدائرة لأنه إذا تغيّر طول نصف القطر، فإن طول القوس يتغير بنفس النسبة، وبالتالي فإن النسبة لا تتغير.

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-1-5:.

يُستخدم عدد من الوحدات للتعبير عن الزوايا: والراديان والدرجة هما الأكثر استخدامًا.

تُعرَّف معظم وحدات قياس الزوايا بحيث تكون الدورة الواحدة (أي دائرة كاملة) تساوي من الوحدات، حيث عدد صحيح. في حالة الدرجات، .

الراديان هو الزاوية المحصورة بقوس دائرة (أي أن الزاوية تقابل القوس) له نفس طول نصف قطر الدائرة.

عندما تُستخدم وحدة الراديان، فإن الزوايا تكون بلا أبعاد. تُستخدم الراديان تقريبًا في جميع الأعمال الرياضية التي تتجاوز الهندسة العملية البسيطة. بسبب الخصائص المرضية و "الطبيعية" التي تُظهرها الدوال المثلثية عندما تكون مدخلاتها بالراديان. الراديان هو وحدة قياس الزوايا في نظام الوحدات الدولي.

الدرجة، المكتوبة على شكل دائرة صغيرة مرتفعة ( )، تساوي دورة، لذا فإن الدورة الواحدة تساوي 360 درجة. يمكن كتابة كسور الدرجات بالتدوين العشري العادي (مثل ثلاث درجات ونصف)، ولكن الوحدات الفرعية الستينية "الدقيقة" و "الثانية" من نظام "الدرجة-الدقيقة-الثانية" تُستخدم أيضًا، خاصةً للإحداثيات الجغرافية وفي علم الفلك والمقذوفات.

مع أنّ تعريف قياس الزاوية لا يدعم مفهوم الزاوية السالبة، إلا أنه من المفيد في كثير من الأحيان استخدام قيم موجبة وسالبة لتمثيل الاتجاهات و/أو الدورانات في اتجاهات معاكسة بالنسبة إلى مرجع.

في نظام الإحداثيات الديكارتية ثنائي الأبعاد، تُعرَّف الزاوية عادةً بضلعيها، بشرط أن يكون رأسها عند الأصل. يقع الضلع الأول على المحور الموجب، بينما يُعرف الضلع الآخر حسب القياس من الضلع الأول بالراديان أو الدرجات أو الدورات. تُمثِل الزوايا الموجبة استدارة باتجاه المحور الموجب، وتُمثِل الزوايا السالبة استدارة باتجاه المحور السالب. عندما تُمثَل الإحداثيات الديكارتية بالموضع القياسي، الذي يُعرَّف بأنه المحور إلى اليمين والمحور لأعلى، يكون الدوران الموجب عكس اتجاه عقارب الساعة والدوران السالب في اتجاه دوران عقارب الساعة.

Chart

Description automatically generated with medium confidence

الشكل 3-1-6: موجبة، سالبة

16- لأي نقطتين و إذا كانت مساحة المستطيل تساوي مساحة مربع نصف قطر الدائرة التي مركزها ، فإن و تسمى **نقطتين متعاكستين** بالنسبة للدائرة.

17- **مكمل القوس** هو المقدار الذي ينقص القوس ليكون نصف دائرة، أو زاويتين قائمتين.

## 3-2󠄀 قضايا من الكتاب الثالث

### القضية 3-1. مركز الدائرة I.

**من الممكن تحديد موقع مركز الدائرة.**

**الإثبات** أنشئ دائرة وخذ أي نقطتين ، على محيطها. أنشئ ونصف عند [1-10]. أنشئ (بشرط أن تقع على المحيط) ومد لتتقاطع مع المحيط عند . نصف عند . ندعي أن مركز الدائرة.

Chart

Description automatically generated with medium confidence

الشكل 3-2-1: [3-1]

افترض بدلاً من ذلك أن النقطة ، التي لا تقع على الوتر ، هي مركز الدائرة. أنشئ و و . لاحظ أن . من الواضح أن .

في و : حسب البناء، ( لأنهما نصفي قطر حسب الفرضية)، والضلع مشترك. حسب [1-8]، نجد أن . لذلك، كل زاوية هي زاوية قائمة. لكن قائمة حسب الإنشاء، لذلك . لكن ، هذا تناقض.

ومن ثم، لا يمكن أن تكون أي نقطة مركز الدائرة بخلاف النقطة الموجودة على . لأن جميع أنصاف الأقطار متساوية في الطول و ، يترتب على ذلك أن ، نقطة منتصف ، هي مركز . هذا يثبت ادعاءنا

**اثبات بديل:**

Chart

Description automatically generated

**الإثبات** فكر في الكائنات المنشأة في الإثبات أعلاه: لأن و ينصف ، كل نقطة متساوية البعد عن النقطتين و يجب أن تقع على [1-10، # 2]. نظرًا لأن المركز بعيد بنفس القدر عن كل من و ، يجب أن يقع المركز على . وبما أن المركز يجب أن يكون أيضًا على مسافة متساوية من و ، فإن المركز هو نقطة منتصف

**اللازمة** 3-1-1. يمر الخط أو الشعاع أو القطعة التي تُنصف أي وتر في دائرة عموديًا عبر مركز الدائرة.

**اللازمة** 3-1-2. المحل الهندسي لمراكز الدوائر التي تمر عبر نقطتين ثابتتين هو الخط الذي يُنصف عموديًا الخط الذي يصل بين النقطتين.

**اللازمة** 3-1-3. إذا كانت ، ، ثلاث نقاط على محيط دائرة، فإن الخطوط التي تنصف الوترين ، عموديًا سوف تتقاطع عند مركز الدائرة.

**تمارين**

1- اثبت [لازمة. 3-1-1].

2- اثبت [لازمة. 3-1-2].

3- اثبت [لازمة. 3-1-3].

### قضية 3-2. نقاط على خط داخل وخارج الدائرة.

**لأي نقطتين على محيط دائرة والخط المار بهما:**

**(1) تشكل النقاط بين نهايتي الخط، على المحيط، وترًا (أي أنها تقع داخل الدائرة).**

**(2) تقع نقاط الخط الأخرى خارج الدائرة.**

**الإثبات أنشئ 󠄀 حيث و أي نقطتين على محيط 󠄀 وأنشئ . ندعي أن:**

**(1) هو وتر .**

**(2) جميع نقاط التي ليست على تقع خارج الدائرة.**

A picture containing wire

Description automatically generated

الشكل 3-2-2: [3-2]

خذ أي نقطة على وأنشئ و و . لاحظ أن حسب [1-16] ؛ لكن،   
 لأن متساوي الساقين [1-5]. لذلك،. حسب [1-29]، [1-29]، بالتالي أقل من نصف قطر . بالتالي، يجب أن تقع داخل الدائرة [تعريف 1-23]. وبالمثل، تقع كل نقطة أخرى بين و داخل . أخيرًا، نظرًا لأن و هما نقطتان في محيط ، وتر. هذا يثبت الادعاء 1.

افترض أي نقطة على بحيث إن ، وأنشئ . حسب [1-16]، ؛ مما سبق، . يترتب على ذلك أنه في ، ، وبالتالي فإن النقطة تقع خارج . هذا يثبت الادعاء 2، ويكمل الإثبات.

**اللازمة** 3-2-1. أي ثلاث نقاط متسامتة لا يمكن أن تكون على محيط دائرة.

**اللازمة** 3-2-2. لا يمكن أن يتقاطع خط مستقيم أو شعاع أو قطعة مع دائرة في أكثر من نقطتين.

**اللازمة** 3-2-3. محيط الدائرة مقعر في كل مكان باتجاه المركز.

**تمارين**

1- اثبت [لازمة. 3-1-1].

2- اثبت [لازمة. 3-1-2].

3- اثبت [لازمة. 3-1-3].

### قضية 3-3. أوتار I.

**لأي وترين في دائرة، إذا وفقط إذا كان أحدهما يمر عبر مركز الدائرة ويُنصف الآخر الذي لا يمر عبر المركز، فإن الوتران متعامدين.**

**الإثبات** أنشئ والوترين و بحيث يحتوي على مركز . ندعي أن ينصف إذا وفقط إذا كان .

A picture containing wire

Description automatically generated

الشكل 3-2-3: [3-3]

افترض أن يُنصف . أنشئ و ، في و : حسب الفرضية، لأن كل منهما نصف قطر ، EO مشترك. حسب [1-8]، . بما أنهما زاويتان متجاورتان، فكل منهما زاوية قائمة، وبالتالي .

افترض أن . لأن ، متساوي الساقين؛ حسب [1-5]، .   
في و : ، لأن ، ويتشاركان الضلع . حسب [1-26]، ، لذلك . لأن ، يُنصف ، هذا يثبت ادعاءنا.

يمكن أيضًا إثبات الجزء الثاني من ال**قضية** بهذه الطريقة:

**الإثبات.** حسب [1-47]، نجد أن

لأن ، فإن ، يترتب على ذلك أن . لذلك، .

**اللازمة** 3-3-1. الخط الذي ينصف عموديًا أحد وترين متوازيين في دائرة ينصف الآخر عموديًا.

**اللازمة** 3-3-2. المحل الهندسي لنقاط المنتصف لنظام من الأوتار المتوازية في دائرة هو قطر الدائرة العمودي عليهم جميعًا.

**اللازمة** 3-3-3. إذا تقاطع خط مع دائرتين متحدتي المركز، فإن الجزأين المقطوعين بين الدائرتين متساويان في الطول.

**اللازمة** 3-3-4. الخط الذي يصل بين مركزي دائرتين متقاطعتين ينصف الوتر المشترك عموديًا.

**ملاحظة**: [3-1]، [3-3]، [3-3، لازمة. 1] بينهن علاقة بحيث إذا اثبت أي منهن، فإن الأخريين صحيحان حسب قاعدة التماثل.

**تمارين**

1- إذا وقف وتر في دائرة مقابل زاوية قائمة عند نقطة معينة، فإن المحل الهندسي لنقطة المنتصف يكون دائرة.

2- اثبت [3-3، لازمة. 1].

3- اثبت [3-3، لازمة. 2].

4- اثبت [3-3، لازمة. 3].

5- اثبت [3-3، لازمة. 4]. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

### قضية 3-4. الأوتار II.

لأي وترين في دائرة بشرط أن يكون أحدهما على الأكثر قطرًا، فإنهما لا ينصفان بعضهما البعض.

**الإثبات**: أنشئ الدائرة والوترين و بشرط أن يكون أحدهما على الأكثر قطرًا و أن و يتقاطعان عند حيث . إذا و ليستا قطرين، فإنهما لا يحتويان . أنشئ ومد لإنشاء . ندعي أنه لا يمكن أن و .

A picture containing wire, sport, colorful, line

Description automatically generated

الشكل 3-2-4: [3-4]

افترض بدلاً من ذلك أن و . حسب [3-3]، هي زاوية قائمة. وعلى نحو مماثل، هي زاوية قائمة، أو . لكن ، ولذلك . يترتب على ذلك أن و ، هذا تناقض.

وبالتالي لا يمكن أن و ، هذا يكمل الإثبات. 󠄀

**اللازمة** 3-4-1. إذا نصف وتران في دائرة بعضهما البعض، فإنهما قطران.

### القضية 3-5. الدوائر غير متحدة المركز I.

**إذا تقاطعت دائرتان عند نقطتين فقط، فإنهما غير متحدتي المركز.**

**الإثبات** أنشئ و اللتين يتقاطعان عند و ؛ ندعي أن و غير متحدتي المركز.

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-5: [3-5]

افترض بدلاً من ذلك أن و لهما نفس المركز، . أنشئ و حيث و و و نقاط مختلفة. لاحظ أن .

لأن مركز ، . لأن مركز ، ؛ ومن ثم، حيث . يترتب على ذلك أن و ، هذا تناقض. لذلك، و غير متحدتي المركز.

**تمارين**

1- لا يمكن أن تشترك دائرتان في ثلاث نقاط دون أن تتطابق. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

### القضية 3-6. الدوائر غير متحدة المركز II.

**إذا قطعت دائرة دائرة أخرى داخليًا عند نقطة فقط، فإن الدائرتين غير متحدتي المركز.**

**الإثبات** أنشئ و بشرط أن تتقاطع مع داخليًا في فقط. ندعي أن و غير متحدتي المركز.

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-6: [3-6]

افترض بدلاً من ذلك أن و متحدتا المركز، وأن مركز كل منهما. أنشئ و . لاحظ أن  
 ؛ إذا كان ، فإن و و تتقاطعان عند نقطتين، على عكس الفرضية.

لأن هو مركز كل من الدائرتين حسب الفرضية، و ؛ فإن و  
 . ومن ثم، ، هذا تناقض. لذلك، فإن الدائرتين غير متحدتي المركز. 󠄀

### قضية 3-7. تفرد أطوال القطع من نقطة على القطر غير المركز.

**لأي نقطة على قطر دائرة بخلاف المركز، أنشئ عددًا محدودًا من القطع إلى المحيط:**

(1) ستحتوي القطعة الأطول من القطع المنشأة على مركز الدائرة.

(2) ستشكل أقصر قطعة منشأة مع أطول قطعة قطرًا.

(3) فيما يخص القطع الأخرى، كل قطعة لها نهاية على المحيط أقرب إلى إحدى نهايتي القطعة الأطول تكون أطول من أي قطعة أخرى لها نهاية أبعد عن نهاية القطعة الأطول.

(4) يمكن بناء قطعتين متساويتين فقط من كل نقطة إلى المحيط، وتقع كل قطعة على جانب مختلف من القطر.

**الإثبات** أنشئ بشرط أن نقطة على القطر بحيث تكون و نقطتين مختلفتين. أنشئ عددًا محدودًا من القطع من إلى المحيط (، ، ، إلخ). لاحظ أن على القطر. سنثبت الادعاءات الأربع.

A picture containing sport, athletic game

Description automatically generated

الشكل 3-2-7: [3-7]

1- أطول قطعة، ، هي القطعة التي تمر عبر .

أنشئ حيث هي نقطة على . من الواضح أن، . 󠄀من هذا نحصل علي   
. في : لأن حسب [1-20]، . لأن هذه المتباينة تنطبق على أي قطعة منشأة باستخدام هذه الطريقة، فإن هي أطول من كل القطع المنشأة.

2- امتداد في الاتجاه المعاكس، ، أقصر من كل القطع المنشأة.

أنشئ وفي : حسب [1-20]، . لأن، ، فإن

لأن هذه المتباينة صحيحة لأي قطعة منشأة باستخدام هذه الطريقة، فإن أقصر من كل القطع المنشأة.

A picture containing sport

Description automatically generated

الشكل 3-2-8: [3-7]

3- فيما يخص القطع الأخرى، كل قطعة لها نهاية على المحيط أقرب إلى إحدى نهايتي القطعة الأطول (PA) أطول من أي قطعة لها نهاية أبعد عن القطعة الأطول (أي ).

أنشئ ، في و : و مشترك. لأن، نجد أن . حسب [1-24]، . وبالمثل، .

4- يتساوى طول القطعتين، وفقط القطعتين، اللتين يصنعان زاويتين متساويتين مع القطر وتقع كل منهما على جانب مختلف من القطر (أي ).

عند ، أنشئ وأنشئ . 󠄀فيما يخص و : ، مشترك، و حسب الإنشاء. حسب [1-4]، ، ولذلك و  
 .

ندعي أنه لا يمكن إنشاء قطعة ثالثة من تساوي . افترض أن هذا ممكنًا وأن . عندها   
، هذا يتعارض مع الادعاء 3 أعلاه.

هذا يكمل الإثبات.

**اللازمة** 3-7-1. إذا أنشئت قطعتين متساويتين ، من النقطة إلى محيط الدائرة، فإن القطر المار بـ ينصف المتشكلة بالقطعتين.

**اللازمة** 3-7-2. إذا كانت هي المركز المشترك للدوائر التي أنصاف أقطارها ، ، ، ، وما إلى ذلك، فإن:

(1) الدائرة التي نصف قطرها هو القطعة الأكبر ( لها نصف قطر ) تقع خارج وتتقاطع معها عند [تعريف 3-4].

(2) تقع الدائرة التي نصف قطرها هو القطعة الأصغر ( لها نصف قطر ) داخل وتتقاطع معها عند .

(3) الدائرة ذات أي من أنصاف الأقطار الأخرى (مثل ) تتقاطع مع في نقطتين (مثل ، ).

**تمارين**

1- اثبت [لازمة. 3-7-1].

2- اثبت [لازمة. 3-7-2].

**ملحوظة** [3-7] هي توضيح جيد للتعريف المهم التالي: إذا غَيَّر مقدار هندسي موضعه باستمرار وفقًا لأي علاقة مُعرفة جيدًا، وإذا احتفظ بنفس القيمة طوال الوقت، يُقال إنه ثابت (مثلما أن نصف القطر لدائرة ثابت).

ولكن إذا زاد المقدار لبعض الوقت ثم بدأ في الانخفاض، فيقال إنه "الأقصى" عندما تتوقف الزيادة. لذلك في الشكل السابق، التي نفترض أنها تدور حول وتلتقي الدائرة، هي القطعة الأكبر.

مرة أخرى، إذا انخفضت لبعض الوقت، ثم بدأت في الزيادة، فهي الأصغر عند بداية الزيادة. لذا فإنّ ، التي نفترض أنها تدور حول وتلتقي الدائرة، هي الأصغر. [3-8] ستوفر توضيحات أخرى لهذا المفهوم.

### القضية 3-8. أطوال القطع من نقطة خارج الدائرة وتفردها.

**لأي نقطة خارج دائرة، إذا أنشئت، من تلك النقطة، قطع بشرط أن تتقاطع مع محيط الدائرة عند نقطتين، واحدة على الجانب "الخارجي" أو المحدب من المحيط والأخرى على "الداخلي" أو المقعر من المحيط. افترض قطعة منشأة تمر خلال مركز الدائرة وأخريات داخل نفس نصف الدائرة ولكن ليس عبر مركز الدائرة. فإن:**

**(1) تمر القطعة الأكبر عبر المركز.**

**(2) تكون القطع الأقرب إلى القطعة المارة عبر المركز أكبر في الطول من الأبعد.**

**(3) إذا أنشئت قطع إلى المحيط المحدب، فإن القطعة الأصغر هي القطعة التي تمر عبر المركز عند مدها.**

**(4) في القطع الأخرى، تكون القطعة الأقرب من القطعة الأصغر أصغر من القطعة الأبعد.**

**(5) من النقطة خارج الدائرة، يمكن إنشاء قطعتين متساويتين إلى المحيط المقعر أو المحدب، وكلاهما يصنع نفس الزاوية مع الخط المار عبر المركز.**

**(6) لا يمكن إنشاء ثلاثة قطع متساوية أو أكثر من النقطة خارج الدائرة إلى أي من المحيطين.**

**الإثبات** أنشئ ، والنقطة خارج ، وجميع النقاط المشار إليها في الشكل أدناه. سنثبت كل ادعاء على حدى.

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-9: [3-8]

1. القطعة الأكبر تمر عبر المركز.

لاحظ أن ولذلك . في : [1-20]. لذلك، .

Diagram

Description automatically generated with medium confidence

الشكل 3-2-10: [3-8]

2- تكون القطع الأقرب إلى القطعة المارة بالمركز أكبر في الطول من القطع الأبعد.

في و : ، OP مشترك، و . لذلك، [1-24]. وبالمثل، ، إلخ.

3- إذا أنشئت قطع إلى محيط محدب، فإن القطعة الأصغر هي التي تمر عبر المركز عند مدها.

في : [1-20]. لأن ، نجد أن .

4- من القطع الأخرى، تكون القطعة الأقرب من الأصغر أصغر من القطعة الأبعد.

في و : ، مشترك، و . حسب [1-24]، . وبالمثل، .

5- من النقطة خارج الدائرة، يمكن إنشاء قطعتين متساويتين إلى المحيط المقعر أو المحدب، وكل منهما يصنع نفس الزاوية مع الخط المار عبر المركز.

أنشئ بحيث إن [1-23]، و في و : ، مشترك، و  
 حسب الإنشاء. حسب [1-4]، . تستوفي القطعتان و المتطلبات المذكورة أعلاه، هذا يثبت ادعاءنا.

6- لا يمكن إنشاء ثلاث قطع متساوية أو أكثر من أي نقطة خارج دائرة إلى أي من المحيطين.

أعلاه، حصلنا على . ندعي أنه لا يمكن إنشاء قطعة ثالثة من تساوي و . افترض أن هذا ممكن وأن . ولكن، حسب الادعاء 4، . هذا التناقض يثبت ادعاءنا.

**اللازمة** 3-8-1. إذا مدت لتلتقي الدائرة عند ، فإن .

**اللازمة** 3-8-2. إذا أنشئت القطعتين المتساويتين من إلى المحيط المحدب أو المقعر، فإن القطر عبر ينصف الزاوية بينهما، وتكون الأجزاء المقطوعة، التي تقطعها الدائرة، متساوية في الطول.

**اللازمة** 3-8-3. إذا كان هو المركز المشترك للدوائر التي أنصاف أقطارها قطع منشأة من إلى محيط ، فإن:

أ) الدائرة التي يكون نصف قطرها هو القطعة الأصغر () تكون متصلة خارجيًا بـ 󠄀 [تعريف 3-4].

ب) الدائرة التي يكون نصف قطرها هو القطعة الأكبر () يكون متصلة داخليًا بـ .

ج) الدائرة التي يكون نصف قطرها أي من القطع الأخرى () تتقاطع مع عند نقطتين (، ).

**تمارين**

1- اثبت [لازمة. 3-8-1].

2- اثبت [لازمة. 3-8-2].

3- اثبت [لازمة. 3-8-3].

### قضية 3-9. مركز الدائرة II.

**النقطة داخل الدائرة التي يمكن منه بناء ثلاث قطع متساوية أو أكثر إلى المحيط هي مركز تلك الدائرة.**

**الإثبات** أنشئ والقطع المتساوية و و . ندعي أن هو مركز .

Chart

Description automatically generated with low confidence

الشكل 3-2-11: [3-9]

أنشئ و ونصفهما عند النقطتين و ، على التوالي [1-10]. ثم أنشئ و .

في و : مشترك، ، و لأن كل منهما نصف قطر . حسب [1-8] ، ولذلك، ؛ ولذلك، و كل منهما زاوية قائمة.

لأن و ينصف ، [3-1، لازمة. 1] تنص على أن مركز هو نقطة على . وبالمثل، فإن مركز هو نقطة على . لأن و يتقاطعان عند ، فإن هو مركز .

**اثبات بديل**:

**الإثبات** لأن ، القطعة التي تنصف تمر عبر المركز [3-7، لازمة. 1]. وبالمثل، فإن القطعة التي تنصف تمر عبر المركز. ومن ثم، فإن نقطة تقاطع هذين المنصفين، ، هي المركز.

### القضية 3-10- تفرد الدوائر.

**إذا اشتركت دائرتان في أكثر من نقطتين من محيطيهما، فإنهما متطابقتان.**

**الإثبات** أنشئ و بشرط أن يكون بينهما أكثر من نقطتين مشتركتين. ندعي أن و يتطابقان.

Shape

Description automatically generated

الشكل 3-2-12: [3-10]

افترض أن و تشتركان في ثلاث نقاط . من ، مركز ، أنشئ القطع ؛ لأن كل منهم نصف قطر، .

لأن دائرة و نقطة يمكن منها إنشاء ثلاثة قطع متساوية و و إلى محيطها، فإن P هي أيضًا مركز [3-9]. حسب [تعريف 3-1] و تتطابقان، مما يثبت ادعاءنا.

**اللازمة** 3-10-1. لا يمكن لأي دائرتين غير متطابقتين أن تشتركان في أكثر من نقطتين.

**ملحوظة** على غرار [3-10، لازمة. 1]، لا يمكن أن يكون هناك أكثر من نقطة مشتركة بين خطين غير متطابقين.

**التمارين**.

1- اثبت [لازمة. 3-10-1].

### القضية 3-11. القطع التي تحتوي على مراكز الدوائر.

**إذا مست دائرة دائرة أخرى داخليًا عند نقطة ما، فيجب أن يحتوي الخط الذي يربط بين مركزي الدائرتين على نقطة التقاطع.**

**الإثبات** أنشئ و 󠄀 بشرط أن تمس داخليًا عند . أيضًا أنشئ . ندعي أن يحتوي على .

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-13: [3-11]

افترض بدلاً من ذلك أن هي مركز بشرط أن لا تقع على ، وأنشئ . مد لتتقاطع مع عند و وتتقاطع مع عند و . لأن نقطة على قطر بين و ، [3-7].

لاحظ أن . 󠄀لأن ، . 󠄀لاحظ أيضًا أن لأن كل منهما نصف قطر ، ولذلك . لكن أعلاه؛ هذا تناقض يوضح أن مركز الدائرة الداخلية، ، يجب أن يقع على ؛ أي أن يحتوي على . هذا يكافئ قولنا أن يحتوي على ، هذا يكمل الإثبات. 󠄀

**اثبات** **بديل**:

**الإثبات** لأن قطعة منشأة من نقطة داخل الدائرة إلى محيط ولكن ليست جزء من القطر المار عبر ، فإن الدائرة التي يكون مركزها ونصف قطرها تقطع عند [3-7، لازمة. 2] وتمسها أيضًا عند P حسب الفرضية، هذا تناقض. حجة مماثلة تنطبق على جميع النقاط التي ليست على . وعلى هذا، يجب أن يقع مركز على . 󠄀

### القضية 3-12. الدوائر المتقاطعة I.

**إذا تقاطعت دائرتان خارجيًا عند نقطة فقط، فإن القطعة التي تصل بين مركزيهما تحتوي على نقطة التقاطع.**

**الإثبات** أنشئ و اللتين يتقاطعان خارجيًا عند النقطة . ندعي أن يحتوي على .

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-14: [3-12]

أنشئ . ادعاء مكافئ لما ورد أعلاه هو أن تحتوي على .

افترض بدلاً من ذلك أن هي مركز ولا يقع على . أنشئ ، التي تتقاطع مع عند و عند ولكن لا تتقاطع عند . أيضًا، أنشئ . وفقًا لفرضيتنا، و . بالتالي

لاحظ أيضًا أن حيث ؛ يترتب على ذلك أن . حسب المعادلة المذكورة أعلاه، .

في : نجد أن أحد أضلاع أكبر من مجموع الضلعين الآخرين، هذا يتناقض مع [1-20]. لذلك، يقع مركز على عند . يحتوي على ، وهذا يكمل البرهان. 󠄀

**إثبات بديل**:

**الإثبات** افترض أن مركز يقع على . لأن قطعة منشأة من نقطة خارج إلى محيطها والتي لا تمر عبر المركز إذا مدت، فإن الدائرة التي يكون مركزها و نصف قطر يجب أن تقطع الدائرة عند [3-8، لازمة.3].

ومع ذلك، فإن دائرة كهذه تمس عند حسب الفرضية، وهذا تناقض. لأن هي أي قطعة بخلاف ، يجب أن يقع مركز على .

ملحوظة [3-11] و [3-12] يمكن كتابتهما كمبرهنة واحدة: "إذا تماست دائرتان في أي نقطة، فإن المركزين وهذه النقطة يكونوا متسامتين." هذه حالة حدية للمبرهنة المعطاة في [3-3، لازمة. 4]: "الخط الذي يربط بين مركزي دائرتين متقاطعتين ينصف الوتر المشترك عموديًا."

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-15: [3-12]، افترض أن و لهما نقطتا تقاطع، و . افترض أيضًا أن تظل ثابتة بينما تتحرك الدائرة الثانية بشرط أن تتطابق النقطة ، في النهاية، مع . لأن القطعة تنصف دائمًا ، فإن تتقاطع مع . نتيجة لهذه الحركة، يصبح الوتر المشترك مماسًا لكل دائرة عند .

**اللازمة** 3-12-1. إذا تماست دائرتان، فإن نقطة تقاطعهما هي اتحاد نقطتي تقاطع. (أي عند حساب عدد النقاط التي تتقاطع عندها الدائرتان، يمكننا اعتبار نقطة التقاطع هذه نقطتين.)

**اللازمة** 3-12-2. إذا تماست دائرتان في نقطة، فلا يمكن أن يكون لهما أي نقطة مشتركة أخرى.

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-16: [3-2، لازمة. 2]

وذلك لأن أي دائرتين لا يمكن أن تحتويا على أكثر من نقطتين مشتركتين [3-10] ونقطة تماسهما تكافئ نقطتين، فلا يمكن أن يكون لدائرتين متماستين أي نقطة أخرى مشتركة. فيما يلي إثبات صوري لهذه اللازمة:

أنشئ و حيث هي نقطة التقاطع، وافترض أن تقع بين و . 󠄀 خذ أي نقطة أخرى في محيط ، وأنشئ . 󠄀حسب [3-7]، . لذلك، تقع خارج محيط الدائرة الداخلية. ومن ثم، لا يمكن أن تكون مشتركة لكلتا الدائرتين. نظرًا لأن النقطة نقطة اعتباطية، لا يمكن أن يكون للدائرتين أي نقطة مشتركة أخرى باستثناء النقطة .

### القضية 3-13. الدوائر المتقاطعة II.

**لا يمكن لدائرتين أن تتماسا في نقطتين داخليًا أو خارجيًا.**

**الإثبات** نقسم الإثبات إلى حالتين: التماس الداخلي والتماس الخارجي

A picture containing sport, athletic game

Description automatically generated

الشكل 3-2-17: [3-13]

**حالة التماس الداخلي**: افترض وجود دائرتين مختلفتين و ، متماستين داخليًا عند النقطتين و . لأن الدائرتين متماستين عند ، تمر القطعة الواصلة بين مركزيهما عبر [3-11]. وبالمثل، تمر القطعة الواصلة بين مركزيهما عبر . ومن ثم، فإن مركزي هاتين الدائرتين والنقطتين و يقعون على ، ولذلك قطر لكل من الدائرتين. نَصف عند : من الواضح أن هي مركز كل من الدائرتين، أي إن الدائرتين متحدتي المركز. هذا يتناقض مع [3-5]، وبالتالي و لا يتماسان داخليًا عند نقطتين.

**حالة التماس الخارجي**: إذا مست الدائرتان و خارجيًا عند النقطتين و بحيث و نقطتان مختلفتان، حسب [3-12]، تحتوي على النقطتين و ؛ بعبارة أخرى، و غير مختلفتين، هذا تناقض. وبالتالي، و لا تتماسان خارجيًا عند نقطتين. 󠄀

**إثبات بديل لحالة التماس الداخلي**:

**الإثبات** أنشئ خطًا ينصف عموديًا. حسب [3-1، لازمة. 1]، يمر هذا الخط عبر مركز كل من الدائرتين، وحسب [3-11] و [3-12] يجب أن يمر عبر كل نقطة تقاطع، وهذا تناقض. ومن ثم، لا يمكن لدائرتين أن تتماسا عند نقطتين. 󠄀

**ملحوظة** هذه القضية هي استدلال مباشر من [3-12، لازمة. 1] أي أنه إذا احتسبت نقطة التماس بنقطتين، فإن أي تماسين سيكونان مكافئين لأربعة تقاطعات؛ لكن لا يمكن أن يكون هناك أكثر من تقاطعين [3-10]. كما أنه يترتب على [3-12، لازمة. 2]، أنه إذا تماست أي دائرتين عند النقطة ()، فلا يمكن أن يكون بينهما أي نقطة أخرى مشتركة؛ وبالتالي، لا يمكنهما التماس مرة أخرى في .

**تمارين**

1- إذا مست دائرة ذات مركز غير ثابت دائرتين ثابتتين خارجيًا، فإن الفرق بين بعدي مركزها عن مركزي الدائرتين الثابتتين يساوي فرق أو مجموع نصفي قطريهما، حسب نوع التماس (داخلي أو خارجي)؛ ما إذا كان نفس النوع في للحالتين أو نوعين مختلفين [تعريف 3-4].

2- إذا مست دائرة ذات مركز غير ثابت إحدى دائرتين ثابتتين داخليًا ومست الدائرة الثابتة الأخرى خارجيًا أو داخليًا، فإن مجموع بعدي مركزها عن مركزي الدائرتين الثابتتين يساوي مجموع أو فرق نصفي قطريهما، حسب نوع التماس بالدائرة الثانية؛ ما إذا كان داخليًا أم خارجيًا.

3- افترض أن دائرتين تتماسان خارجيًا. إذا أنشئ أي قاطع خلال نقطة التقاطع بحيث يقطع الدائرتين، مرة أخرى، في نقطتين، فإن أنصاف الأقطار المنشأة إلى هاتين النقطتين متوازيتان. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

4- افترض أن دائرتين تتماسان خارجيًا. إذا كان القطران في هاتين الدائرتين متوازيين، فإن الخط الممتد من نقطة التقاطع إلى نهاية لقطر منهما يمر عبر نهاية للآخر. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

### القضية 3-14. تساوي أطوال الأوتار

**تتساوى الأوتار في دائرة إذا، وفقط إذا، كانت متساوية البعد عن المركز.**

**الإثبات** أنشئ التي فيها الوتران و . ندعي أن إذا وفقط إذا كانت و متساويتي البعد عن المركز.

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-18: [3-14]

افترض أن ، أنشئ و . ندعي أن .

أنشئ و . لأن وتر في و قطعة عمودية منشأة من المركز إلى ، فإن تنصف [3-3]؛ أو . وعلى نحو مماثل، . لأن حسب الفرضية، .

لأن قائمة، حسب [1-47]. وبالمثل، . بما أن و ، لدينا ، وبالتالي .

افترض إنشاء بطريقة مشابهة لما ورد أعلاه. ندعي أن .

أنشئ و . حسب [1-47] وعلى نحو مماثل للإثبات أعلاه، حيث حسب فرضيتنا. ومن ثم ، وبالتالي . لكن و  
 حسب [3-3]، ولذلك .

**تمارين**

1- إذا انزلق وتر ذو طول معين في دائرة ثابتة، فعندئذٍ:

(أ) يكون المحل الهندسي لنقطة المنتصف دائرة؛

(ب) يكون المحل الهندسي لأي نقطة ثابتة على الوتر دائرة.

### القضية 3-15. تباين أطوال الأوتار.

**القطر هو أطول وتر في الدائرة، لأي وترين يكون الأقرب إلى المركز هو الأطول.**

**الإثبات** أنشئ التي قطرها وفيها الوتران و بشرط أن يكون أقرب إلى من . ندعي أن:

(1) هو أطول وتر في الدائرة ؛

(2) ؛

(3) الأوتار الأطول أقرب إلى المركز من الأوتار الأقصر.

A picture containing wire

Description automatically generated

الشكل 3-2-19: [3-15]

(1) ندعي أن هو أطول وتر في الدائرة.

أنشئ و و وكذلك و . لاحظ أن . في  
 : حسب [1-20]. لذلك، . لأن اختيار كان اعتباطيًا، هذا يكمل الإثبات.

(2) ندعي أن .

لأن أقرب إلى من حسب الفرضية، فإنه يترتب عن ذلك أن [3-14]. لأن و مثلثان قائمان، نجد أن و . بما أن ، . لكن ، ولذلك . يترتب على ذلك أن . بما أن و حسب [3-3]، .

(3) الأوتار الأطول أقرب إلى المركز من الأوتار الأقصر.

افترض أن . ندعي أن .

كما في السابق، نجد أن . 󠄀حسب فرضيتنا،. لذلك ، وبالتالي . 󠄀

**تمارين.**

1- أقصر وتر يمكن بناؤه عبر نقطة داخل دائرة هو العمودي على القطر الذي يمر عبر تلك النقطة.

2- من أي نقطة، داخل دائرة أو خارجها، أنشئ وتر يساوي طول وتر معين.

3- من إحدى نقطتي التقاطع بين دائرتين، أنشئ قاطع

(أ) بشرط أن يكن مجموع الجزئين المقطوعين بالدائرتين هو الأقصى؛

(ب) يكون له أي طول أقل من الأقصى.

4- افترض أن دوائر تمس بعضها البعض خارجيًا عند و و ومد الوترين و لاثنين منهما ليلتقيا بالدائرة الثالثة في النقطتين و . اثبت أن هو قطر الدائرة الثالثة ويوازي القطعة الواصلة بين مركزي الدائرتين الأخريين.

### القضية 3-16. العمودي علي قطر دائرة.

**يتقاطع العمود على قطر دائرة (من نهايته) مع المحيط عند نقطة فقط، وأي قطعة أخرى تمر بنهاية القطر تتقاطع مع الدائرة في نقطتين.**

**الإثبات** أنشئ 󠄀 التي فيها النقاط و و على محيطها حيث هو قطر 󠄀 . أيضًا أنشئ و حيث يتقاطع مع 󠄀 عند . ندعي أن:

(1) تمس عند فقط؛

(2) تقطع .

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-20: [3-16]

الادعاء 1: يمس عند فقط.

افترض أن هي أي نقطة على وأنشئ القطعة . لأن قائمة، حسب [1-47]. يترتب علي ذلك أن ، ولذلك . حسب [3-2]، تقع خارج . وبالمثل، فإن كل نقطة أخرى في باستثناء تقع خارج 󠄀 . ومن ثم، يتقاطع مع عند فقط.

**الادعاء 2**: تقطع .

أنشئ . يترتب علي ذلك أن . لذلك ، ولذلك  
 . حسب [3-2]، يجب أن تقع داخل ، وبالتالي إذا مدت ، يجب أن تتقاطع أيضًا مع عند وبالتالي تقطعها.

هذا يكمل الإثبات

**تمارين**

1- لأي دائرتين متحدتي المركز، جميع أوتار الدائرة الأكبر التي تمس الدائرة الأصغر تكون متساوية في الطول. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- أنشئ خط موازٍ لأي خط يمس أي دائرة.

3- أنشئ خطًا عموديًا على أي خط يمس أي دائرة.

4- أنشئ دائرة مركزها عند نقطة معينة

(أ) وتمس خطاً معيناً؛

(ب) وتمس دائرة معينة.

كم عدد الحلول لهذه الحالة؟

5- أنشئ دائرة لها نصف قطر معين وتمس خطين معينين. كم عدد الحلول؟

6- جد المحل الهندسي لمراكز نظام من الدوائر التي تمس أي خطين.

7- أنشئ دائرة لها أي نصف قطر وتمس أي دائرة وأي خط أو تمس أي دائرتين.

### القضية 3-17. المماسات للدوائر I.

**من الممكن بناء مماس لأي دائرة من نقطة خارج الدائرة.**

**الإثبات** أنشئ و بشرط أن تكون خارج . نرغب في بناء المماس لـ .

A picture containing diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-21: [3-17] ( ) ( )

أنشئ نصف القطر ومد لإنشاء . أنشئ الدائرة التي مركزها و نصف قطرها ، أيضا أنشئ . أنشئ ، التي تتقاطع مع في ، وأنشئ . ندعي أن هي المماس المطلوب لـ .

لأن مركز و ، فإن و . في و : ، ، وكل مثلث يتشارك . حسب [1-4]، ، ولذلك  
.

لكن قائمة حسب الإنشاء؛ وبالتالي قائمة، وحسب [3-16]، تمس عند . حسب التعريف، فإن هي مماس لـ عند النقطة ، هذا يثبت ادعائنا. 󠄀

**اللازمة** 3-17-1. إذا مدت لإنشاء وأنشئت ، فستقطع عند . هو المماس الثاني لـ عند .

**تمارين**

1- أثبت أن المماسين و في [3-17] متساويان في الطول لأن مربع كل منهما يساوي مربع ناقص مربع نصف القطر.

2- إذا كان الشكل الرباعي محيطًا بدائرة، فإن مجموع طولي أي ضلعين متقابلين يساوي مجموع طولي الضلعين الآخرين.

3- إذا كان متوازي الأضلاع محيطًا بدائرة، فلا بد أن يكون معينًا، ومن ثم يتقاطع قطريه عند المركز.

4- إذا أنشئت وتقاطعت مع عند ، فعندئذٍ

5- المحل الهندسي لتقاطع مماسين متساويين لدائرتين هو قطعة (تسمى المحور الأساسي أو خط القوة للدائرتين).

6- جد نقطة بشرط أن تكون المماسات منها إلى أي ثلاث دوائر متساوية. (تسمى هذه النقطة بالمركز الأساسي للدوائر الثلاث).

7- اثبت أن المستطيل يساوي مربع نصف قطر . (ملاحظة: نحدد موقع النقاط المتعاكسة بالنسبة إلى . انظر التعريف أدناه.)

8- الجزء المقطوع على مماس متغير بواسطة مماسين ثابتين يقف مقابل زاوية ثابتة عند المركز.

9- أنشئ مماسًا مشتركًا لدائرتين. وضح كيفية بناء قطعة تقطع دائرتين بشرط أن تكون الأوتار المقطوعة ذات أطوال معينة.

10- اثبت [لازمة. 3-17-1].

### القضية 3-18. المماسات على الدوائر II.

**إذا مس خط دائرة، فإن القطعة من مركز الدائرة إلى نقطة التقاطع مع الخط تكون عمودية على الخط.**

**الإثبات** أنشئ 󠄀 حيث النقطة على محيطها، وأيضًا أنشئ . 󠄀وندعي أنه إذا مس ، فإن .

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-22: [3-18]

افترض بدلاً من ذلك أن قطعة أخرى منشأة من المركز بشرط أن حيث تقطع الدائرة عند . لأن الزاوية قائمة حسب الفرضية، الزاوية يجب أن تكون حادة [1-17]. حسب [1-19]، لكن  
 و، ولذلك ، هذا تناقض. ومن ثم .󠄀

### القضية 3-19- المماسات للدوائر III.

**لأي خط مماس لدائرة، يمر العمودي المبني من نقطة التقاطع عبر مركز الدائرة.**

**الإثبات** افترض أن مماس لـ . ندعي أنه إذا كان ، فإن يحتوي على مركز .

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-23: [3-19]

افترض خلاف ذلك: 󠄀 أن مركز 󠄀 وأنشئ . 󠄀لاحظ أن.لأن يمس و مبنية من المركز إلى نقطة التقاطع، حسب [3-18]. لأن حسب الفرضية، و قائمتان.

يترتب على ذلك أن و ، وبالتالي،   
و، هذا تناقض. لذلك، المركز يقع على . 󠄀

**اللازمة** 3-19-1. إذا مست مجموعة من الدوائر نفس الخط عند نفس النقطة، فإن المحل الهندسي لمراكزها يكون عموديًا على الخط عند النقطة.

اللازمة 3-19-2. لنفترض أن لدينا دائرة وأي اثنين من الآتي:

(أ) مماس للمحيط؛

(ب) قطعة أو شعاع أو خط مستقيم مبني من مركز الدائرة إلى نقطة التقاطع.

(ج) زوايا قائمة عند نقطة التقاطع.

فإنه حسب [3-16]، [3-18]، [3-19]، وقاعدة التماثل، تنتج الخاصية المتبقية. إذا كان لدينا (أ) و (ج)، فقد يكون من الضروري مد القطعة أو شعاع إلى مركز الدائرة: هذه حالات حدية لـ [3-1، لازمة. 1] و [3-3].

### القضية 3-20. الزوايا عند مركز الدائرة وعلى المحيط.

**الزاوية الموجودة عند مركز الدائرة هي ضعف الزاوية عند المحيط عندما يقف كل منهما على نفس قوس من المحيط.**

**الإثبات** أنشئ التي نصف قطرها ، وأنشئ و حيث و و هي نقاط على محيط . ندعي أن .

Chart, radar chart

Description automatically generated

الشكل 3-2-24: [3-20]

أنشئ ، في : لأن ، حسب [1-6] وبالتالي  
 . بما أنّ حسب [1-32]،  
 . وبالمثل في ، . يترتب على ذلك أن

أنشئ و و . بحجة مماثلة لما سبق، يمكننا إثبات أن و . بما أنّ ، نجد أن

وهذا يُكمل الإثبات. 󠄀

**اللازمة** 3-20-1. الزاوية على نصف دائرة هي زاوية قائمة.

### القضية 3-21. الزوايا على الأوتار.

**في أي دائرة، الزوايا الواقفة على نفس القوس متساوية في القياس.**

**الإثبات** أنشئ ، وأيضا أنشئ و على نفس القوس . ندعي أن: .

Chart, radar chart

Description automatically generated

الشكل 3-2-25: [3-21]

حسب [3-20]، أو . هذا يثبت ادعاءنا.

**اللازمة** 3-21-1. لأي مثلثين و يقفان على نفس القاعدة وزاويتا الرأس لهما متساويتان وعلى نفس الجانب من القاعدة، فإن النقاط الأربع و و و تقع على نفس الدائرة.

**اللازمة** 3-21-2. إذا كانت و نقطتين ثابتتين وإذا غيّرت موضعها بشرط أن يكون للزاوية نفس القياس طوال الوقت، يكون المحل الهندسي لـ دائرة. (أو: إذا علمت قاعدة المثلث والزاوية الرأسية، يكون المحل الهندسي للرأس دائرة).

**تمارين**

1- إذا علمت قاعدة المثلث والزاوية الرأسية، جد المحل الهندسي

(أ) لتقاطع أعمدته؛

(ب) لتقاطع المنصفات الداخلية لزاويتي القاعدة؛

(ج) لتقاطع المنصفات الخارجية لزاويتي القاعدة؛

(د) لتقاطع المنصف الخارجي لزاوية للقاعدة والمنصف الداخلي للأخرى.

2- إذا علمت مجموع مربعي أي قطعتين، اثبت أن مجموعها هو الأقصى عندما تكون القطعتان متساويتين في الطول.

3- من بين كل المثلثات التي لها نفس القاعدة وزاوية الرأس، أثبت أن مجموع أضلاع المثلث المتساوي الساقين هو الأكبر.

4- من بين كل المثلثات المدرجة في دائرة، محيط المثلث متساوي الأضلاع هو الأكبر.

5- من بين جميع الأشكال، المدرجة داخل نفس الدائرة، التي لها عدد معين من الأضلاع، تكون المساحة الأكبر عندما تكون الأضلاع متساوية.

6- اثبت [لازمة. 3-20-1].

7- اثبت [لازمة. 3-21-1].

8- اثبت [لازمة. 3-21-2].

### القضية 3-22. أشكال رباعية مدرجة داخل دوائر.

**مجموع أي زاويتين متقابلتين في أي شكل رباعي مدرج في دائرة يساوي زاويتين قائمتين.**

**الإثبات** أنشئ شكل رباعي مدرج في . ندعي أن مجموع أي زاويتين متقابلتين في الشكل يساوي زاويتين قائمتين.

Polygon

Description automatically generated with medium confidence

الشكل 3-2-26: [3-22]

افترض أن راديان = زاويتين قائمتين، وأنشئ القطرين و . بما أنّ و تقفان على القوس ، حسب [3-21]. وعلى نحو مماثل، ، لأنهما تقفان على القوس . بالتالي

من هذا، نحصل علي

حيث الجانب الأيمن من المعادلة هو مجموع الزوايا الداخلية لـ .

لأن هذا المجموع يساوي راديان حسب [1-32]،

وعلى نحو مماثل،

(مع مراعاة ما يقتضيه اختلاف الحال)، هذا يثبت ادعاءنا. 󠄀

**اللازمة** 3-22-1. إذا كان مجموع أي زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي يساوي زاويتين قائمتين، فيمكن إحاطة الشكل الرباعي بدائرة.

**اللازمة** 3-22-2. إذا كان متوازي الأضلاع مدرج في دائرة، فهو مستطيل.

**تمارين**

1- إذا كانت كل زاويتين متقابلتين مكملتين لبعضهما البعض في الشكل الرباعي، فإن الشكل دائري.

2- القطعة التي تصنع زوايا متساوية مع زوج من الأضلاع المتقابلة في شكل رباعي دائري تصنع زوايا متساوية مع الزوج الآخر والقطرين.

3- إذا مد ضلعان متقابلان من الشكل الرباعي الدائري ليتقطعا وأسقط عمودي على منصف الزاوية بينهما من نقطة تقاطع القطرين، فإن العمودي سينصف الزاوية بين القطرين.

4- إذا توازى زوجان من الأضلاع المتقابلة في شكل سداسي دائري، على التوالي، فإن الضلعين المتبقيين (الزوج المتبقي) من الأضلاع متوازيان أيضًا.

5- إذا تقاطعت دائرتان عند النقطتين و وأنشئت أي قطعتين ، عبر و ، قاطعتين إحدى الدائرتين في النقطتين و والأخرى في النقطتين و ، فإن .

6- إذا أنشئت مثلثات متساوية الأضلاع على أضلاع أي مثلث، فإن القطع التي تصل رؤوس المثلث الأصلي بالرؤوس المقابلة في المثلثات متساوية الأضلاع تتقاطع.

7- في # 6، اثبت أن مراكز الدوائر المنشأة حول المثلثات متساوية الأضلاع تكون مثلثًا متساوي الأضلاع.

8- إذا أنشئ شكل رباعي حول دائرة، فإن الزاويتين الموجودتين عند المركزين الواقفتين مقابل ضلعين متقابلين تكون مكملتين لبعضهما البعض.

9- إذا التقى مماس متحرك مع مماسين متوازيين، فإنه يقف مقابل زاوية قائمة عند المركز.

10- إذا أحاط شكل سداسي دائرة، فإن مجموع الزوايا الواقفة مقابل المركز من أي ثلاثة أضلاع متبادلة يساوي زاويتين قائمتين.

11- اثبت [لازمة. 3-22-1].

12- بعد الانتهاء من # 11، أعد كتابة نتائج [3-22] و [لازمة. 3-22-1] في قضية.

13- اثبت [لازمة. 3-22-2].

### القضية 3-23. تفرد الأقواس.

**لا يمكن بناء قوسين متشابهين وغير متساويين على نفس الجانب من نفس الوتر.**

**الإثبات** أنشئ . افترض إنشاء قوسين متشابهين وغير متساويين و على نفس الجانب من . أنشئ و و .

Diagram

Description automatically generated with medium confidence

الشكل 3-2-27: [3-23]

بما أن القوس مشابه لـلقوس ، حسب [تعريف 3-10]؛ هذا يتناقض مع [1-16] ويثبت ادعائنا. 󠄀

### القضية 3-24. تساوي الأقواس المتشابهة.

**الأقواس المتشابهة التي تقف على أوتار متساوية تكون متساوية.**

**الإثبات** أنشئ والقوسين و بشرط أن . ندعي أن .

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 3-2-28: [3-24]

بما أن ، إذا طُبقت على بشرط أن تتطابق النقطة مع وتتطابق النقطة مع ، حينها يتطابق الوتر مع . لأن ، يجب أن يتطابقا في كل نقطة [3-23]. هذا التناقض يثبت ادعاءنا.

**اللازمة** 3-24-1. الأوتار المتساوية في الطول، متطابقة أيضًا؛ لذلك فإن الأقواس المتشابهة متطابقة أيضًا.

### القضية 3-25. إنشاء دائرة من قوس.

**إذا عُلم قوس في أي دائرة، من الممكن إنشاء هذه الدائرة.**

**الإثبات** إذا علمت القوس في ، أنشئ .

A picture containing text, clock

Description automatically generated

الشكل 3-2-29: [3-25]

خذ أي ثلاث نقاط على القوس . أنشئ ، . نصف عند و عند . أنشئ و . ندعي أن ، نقطة تقاطع و ، هو مركز الدائرة المطلوبة.

لأن ينصف ويتعامد مع ، فإن مركز الدائرة التي قوسًا فيها يقع على [3-1، لازمة. 1]. وبالمثل، يقع مركز الدائرة التي قوسًا فيها على .

لأن هو تقاطع و ، هذا يُكمل إثباتنا. 󠄀

### القضية 3-26. الزوايا والأقواس .

**في الدوائر المتساوية، تقف الزوايا المتساوية عند المركز أو على المحيط على أقواس متساوية.**

**الإثبات** أنشئ الدائرتين المتساويتين و والزاويتين المتساويتين عند المركزين: في و في . أيضا أنشئ الزاويتين المتساويتين في حيث على المحيط و في حيث على المحيط. ندعي أن القوس القوس .

A picture containing orange

Description automatically generated

الشكل 3-2-30: [3-26]

أنشئ و وفي و : و و . حسب [1-4]،  
 ، ولذلك .

حسب [3-20] ، و . لأن حسب الفرضية، . حسب [تعريف 3-10]، القوس ~ القوس . وحسب [3-24]، القوس القوس .

حسب [تعريف 3-1] ، و متساويتان في القياس، وبالتالي القوس قوس . هذا يثبت ادعاءنا. 󠄀

**اللازمة** 3-26-1. إذا تساوت زاويتين متقابلتين في شكل رباعي دائري فإن أحد قطريه يجب أن يكون قطر للدائرة المحيطة.

**اللازمة** 3-26-2. الأوتار المتوازية في دائرة تقطع أقواسًا متساوية.

**اللازمة** 3-26-3. إذا تقاطع وتران عند أي نقطة داخل دائرة، فإن مجموع القوسين المتقابلين المقطوعين بالوترين يساوي القوس الذي يقطعه الوتران الموازيان للوترين السابقين عندما تكون نقطة تقاطعهما على المحيط.

إذا تقاطع وتران عند أي نقطة خارج دائرة، فإن الفرق بين القوسين المقطوعين يساوي القوس الذي يقطعه الوتران الموازيان للوترين السابقين عندما تكون نقطة تقاطعهما على المحيط.

**اللازمة** 3-26-4. إذا تقاطع وتران عموديًا، فإن مجموع القوسين المتقابلين المقطوعين في الدائرة هو نصف دائرة.

**تمارين**

1- اثبت [لازمة. 3-26-1].

2- اثبت [لازمة. 3-26-2].

3- اثبت [لازمة. 3-26-3].

4- اثبت [لازمة. 3-26-4].

### القضية 3-27. الزوايا والأقواس .

**في الدوائر المتساوية، تكون الزوايا عند المراكز أو على المحيطات، التي تقف على أقواس متساوية، متساوية في القياس.**

**الإثبات** أنشئ الدائرتين المتساويتين و وأنشئ الزاويتين المتساويتين عند المركزين (، ) وعلى المحيطين (، ) اللتين تقفان على قوسين متساويين (، ). ندعي أن: و .

Chart

Description automatically generated

الشكل 3-2-31: [3-27]

فيما يخص الزاويتين عند المركزين (K ). افترض أن و . لأن الدائرتين متساويتين من جميع النواحي، فإن القوس القوس [3-26]. لاحظ أن القوس .

لكن القوس القوس حسب الفرضية. ولذلك القوس القوس و  
(القوس = القوس القوس ) حيث (القوس = 0)، هذا تناقض. تناقض مماثل ينتج إذا افترضنا أن . لذلك، .

فيما يخص الزاويتين على المحيطين. لأن و حسب [3-20]، . هذا يكمل الإثبات.

### القضية 3-28. الأوتار والأقواس .

**في الدوائر المتساوية، تقسم الأوتار ذات الأطوال المتساوية المحيطات إلى أقواس متساوية، على التوالي.**

**الإثبات** أنشئ الدائرتين المتساويتين (، ) والوترين المتساويين (، ). ندعي أن: و يقسمان محيط و ، على التوالي، بحيث يكون القوس القوس والقوس القوس .

Chart, shape

Description automatically generated

الشكل 3-2-32: [3-28]

إذا كانت الأوتار المتساوية أقطار، فإن كل قوس من الأقواس يساوي نصف دائرة، هذا يكمل الإثبات.

خلاف ذلك، أنشئ و و و . لأن الدائرتين متساويتين من جميع النواحي، فإن نصف قطر كل منهما يساوي نصف قطر الأخرى [تعريف 3-1].

في و : و و . حسب [1-8]، ؛ بالتالي، ولذلك القوس = القوس [3-26].

لأن المحيط كله يساوي في القياس محيط كله، يترتب على ذلك أن القوس = القوس . هذا يثبت ادعاءنا.

### القضية 3-29. الزوايا والأقواس II.

في الدوائر المتساوية، تقف الأقواس المتساوية مقابل أوتار متساوية.

**الإثبات** أنشئ الدائرتان المتساويتان و حيث القوس القوس . ندعي أن: .

Chart

Description automatically generated

الشكل 3-2-33: [3-29]

أنشئ و و و . لأن الدائرتين متساويتان في القياس، والزاويتين و عند المركزين وتقفان على قوسين متساويين و [3-27].

في و : و و . حسب [1-4]،. لذلك، ، هذا يثبت ادعاءنا.

**اللازمة** 3-29-1. القضايا [3-26] - [3-29] مرتبطة بالمعنى التالي: في الدوائر ذات أنصاف الأقطار المتساوية،

1- في [3-26]، الزوايا المتساوية تقتضي أقواسًا متساوية.

2- في [3-27]، تقتضي الأقواس المتساوية زوايا متساوية. معًا، تنص [3-26] و [3-27] على أن الزوايا المتساوية والأقواس المتساوية متكافئتين.

3- في [3-28]، تقتضي الأوتار المتساوية أقواسًا متساوية.

4- في [3-29]، تقتضي الأقواس المتساوية أوتارًا متساوية. معًا، تنص [3-28] و [3-29] أن الأوتار المتساوية والأقواس المتساوية متكافئتين.

أو: في الدوائر ذات أنصاف أقطار المتساوية، أوتار متساوية ⇐⇒ زوايا متساوية ⇐⇒ الزوايا الواقفة على أقواس متساوية.

**ملاحظة.** لأن الدائرتين في القضايا الأربعة الأخيرة متساويتان، فهما متطابقتان، وتتضح حقيقة القضايا بالتراكب.

### القضية 3-30. تنصيف قوس.

**الإثبات** نرغب في تنصيف القوس المعطى .

A picture containing diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-34: [3-30]

أنشئ الوتر ونصفه عند . أنشئ ، ويتقاطع مع القوس عند . ندعي أن القوس منصف عند .

أنشئ و ، وفي و : ، ويشتركان في الضلع و . حسب [1-4]، ، ولذلك .

حسب [3-28]، القوس = القوس ؛ لأن القوس = القوس القوس ، القوس مُنصف عند . 󠄀

**تمارين**

1- افترض أن نصف دائرة قطرها وفيه الوتر . مد لإنشاء و لإنشاء ، وافترض أن الشعاعين يتقاطعان عند . اثبت أنه إذا كانت تساوي نصف قطر ، فإن القوس . [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- يلتقي المنصفان الداخلي والخارجي للزاوية الرأسية لمثلث مدرج في دائرة بالمحيط، مرة أخرى، عند نقاط متساوية البعد عن نهايتي القاعدة.

3- إذا كانت إحدى نقطتي تقاطع أي دائرتين وأُنشئ الوترين و ، قاطعين الدائرتين في النقاط و و و ، فإن المثلثين و المتكونين عن طريق توصيل نقاط التقاطع بنقطة تقاطع الدائرتين الثانية متساويا الزوايا.

4- إذا كانت الزاوية الرأسية لأي مثلث مدرج في دائرة مُنصفة بالخط الذي يلتقي الدائرة مرة أخرى عند ، ومن أنشئ العمودان ، إلى الضلعين، أحدهما ممتد، اثبت أن وبالتالي فإن  
 .

### القضية 3-31. نظرية تاليس.

**لأي دائرة،**

**(1) إذا قُسمت الدائرة إلى نصفين، فإن الزاوية الواقفة على أي من القوسين هي زاوية قائمة؛**

**(2) إذا قسمت الدائرة إلى قوسين غير متساويين، فإن الزاوية الواقفة على القوس الأصغر هي زاوية حادة؛**

**(3) إذا قسمت الدائرة إلى قوسين غير متساويين، فإن الزاوية الواقفة على القوس الأكبر هي زاوية منفرجة.**

**الإثبات** أنشئ والقطر والنقاط و و بشرط أن تكون و على نصف دائرة و على نصف الدائرة الآخر. ندعي أن:

(1) على القوس زاوية قائمة؛

(2) على القوس زاوية حادة؛

(3) على القوس زاوية منفرجة؛

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-35: [3-31]

الادعاء 1: على القوس زاوية قائمة؛

أنشئ نصف القطر ومد لإنشاء . في : لأن ، . وبالمثل في  
 ، . لذلك

في : حسب [1-32]، . لذلك، وهما زاويتان متجاورتان؛ ولذلك، هي زاوية قائمة.

الادعاء 2: على القوس زاوية حادة.

أنشئ . لأن ، . لكن اثبتنا أن هي زاوية قائمة. لذلك، حادة.

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-36: [3-31]

ادعاء 3: في القوس زاوية منفرجة؛

أنشئ . لأن ، . لأن زاوية قائمة. منفرجة

**اللازمة** 3-31-1. إذا أدرج متوازي أضلاع في دائرة، فإن قطريه يتقاطعان عند مركز الدائرة.

**اللازمة** 3-31-2. [3-31] تظل صحيحة إذا استبدلت أوتار بأطوال مناسبة بالأقواس، مع إجراء التعديلات اللازمة.

### القضية 3-32. الزاوية المحصورة بين الوتر والمماس وعلاقتها بالزاوية المحيطية التي تقف على الوتر.

**إذا أنشئ من نقطة تقاطع خط مماس مع دائرة وتر يقطع الدائرة، فإن الزوايا التي يصنعها هذا الوتر مع المماس تساوي على التوالي الزوايا على الأقواس المتبادلة للدائرة.**

**الإثبات** أنشئ بشرط أن يكون مماسًا لـ عند . 󠄀 أنشئ الوتر ؛ لاحظ أن تقطع . ندعي أن الزوايا التي يصنعها هذا الوتر مع المماس تساوي على التوالي زوايا الأقواس المتبادلة للدائرة. سنثبت هذا في حالتين.

Diagram

Description automatically generated with medium confidence

الشكل 3-2-37: [3-32] ()

الحالة 1: نرغب في إظهار أن في الشكل ( ).

أنشئ بحيث . أنشئ . 󠄀لأن مماس لـ ، من الواضح أن منشئة عند و ، حسب [3-19] نجد أن يمر عبر مركز . حسب [3-31]، زاوية قائمة؛ بما أن مثلث، فإن مجموع الزاويتين المتبقيتين ، يساوي زاوية قائمة.

لأن زاوية قائمة حسب الإنشاء، . من هذا نحصل علي  
 ، هذا يثبت الحالة الأولى.

الحالة الثانية: نرغب في إثبات أن في الشكل ().

Diagram

Description automatically generated with low confidence

الشكل 3-2-38: [3-32] ( )

خذ أي نقطة على القوس . بما أن الشكل الرباعي مدرج في دائرة، فمجموع كل زاويتين متقابلتين  
 يساوي زاويتين قائمتين [3-22] ولذلك يساوي المجموع . لكن،  
 حسب الحالة 1. لذلك .

هذا يثبت حالتنا الثانية والأخيرة، ويكمل الإثبات. 󠄀

**تمارين**

1- في حالة تماس دائرتين، فإن أي خط مُنشأ عبر نقطة التقاطع سيقطع قطوع متشابهة.

2- إذا تماست دائرتان وأنشئ أي خطين عبر نقطة التقاطع (قاطعين كلتا الدائرتين مرة أخرى)، فإن الوتر الذي يصل نقطتي تقاطعهما مع دائرة يكون موازيًا للوتر الذي يصل بين نقطتي تقاطعهما مع الدائرة الأخرى.

3- افترض أن قوس في دائرة، و مماس عند (يلتقي بالوتر الممتد إلى E)، و حيث نقطة في . اثبت أنه إذا نُصفت عند فإن القوس .

4- إذا تماست دائرتان عند نقطة وإذا كان وتر عبر ، ويلتقي بالدائرتين عند النقطتين و ، فأثبت أن المماسين عند و متوازيين، وأنه عندما تكون إحدى الدائرتين داخل الأخرى، فإن المماس عند يلتقي بالدائرة الخارجية عند نقطتين متساويتي البعد عن .

5- إذا تماست دائرتان خارجيًا، فإن المماس المشترك بينهما على أي من الجانبين يقف مقابل زاوية قائمة عند نقطة التقاطع، ومربعه يساوي المستطيل المحصور بالقطرين.

### القضية 3-33. إنشاء قطع دائري على خط بحيث يحصر القطع زاوية مساوية لأي زاوية.

**الإثبات** أنشئ و . على ، نرغب في إنشاء قطع دائري يحصر زاوية مساوية لـ.

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-39: [3-33]

إذا كانت قائمة، أنشئ نصف دائرة على ليكون القطع المطلوب. حسب [3-31]، يحصر نصف الدائرة زاوية قائمة.

خلاف ذلك، أنشئ . أنشئ و . لنفترض أن قطر ، التي ندعي أنها الدائرة المطلوبة.

لاحظ أن فيها على محيطها لأن قائمة [3-31]. أيضا، تمس لأن زاوية قائمة [3-16]. يترتب على ذلك أن . لأن حسب الإنشاء، .

ولذلك على ، أنشأنا قطع من مقابل زاوية تساوي . 󠄀

**تمارين**

1- أنشئ المثلث، إذا علمت قاعدته وزاويته الرأسية وأي من البيانات التالية:

(أ) عمود.

(ب) مجموع أو فرق أطوال الأضلاع.

(ج) مجموع أو فرق مربعات أطوال الأضلاع.

(د) ضلع المربع المدرج الذي على القاعدة.

(هـ) المتوسط الذي ينصف القاعدة.

2- إذا أنشئت خطوط من نقطة ثابتة إلى جميع نقاط محيط أي دائرة، فأثبت أن المحل الهندسي لجميع نقاط تنصيفها هو دائرة.

3- إذا علمت القاعدة وزاوية الرأس لمثلث، أوجد المحل الهندسي لنقطة منتصف الخط الذي يصل بين رأسي المثلثين المتساويين الأضلاع المنشأين على الجانبين.

4- لنفس الحالة، جد المحال الهندسية لرؤوس المربع المنشئ على أحد الجانبين.

### القضية 3-34.

### إنشاء قطع من دائرة بحيث يحصر زاوية محيطية مساوية لأي زاوية.

**الإثبات** أنشئ و . نرغب في إنشاء قطع من يقابل زاوية محيطية تساوي .

اختر النقطة على محيط وأنشئ المماس . 󠄀على ، أنشئ . ندعي أن القطع من هو القطع المطلوب.

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-40: [3-34]

اختر أي نقطة على محيط بخلاف القوس . أنشئ و . حسب [3-32]، . لكن حسب الإنشاء، ولذلك .

وهكذا، أنشأنا قطع من يقابل زاوية محيطية تساوي . 󠄀

### القضية 3-35. مساحات المستطيلات المنشأة على أوتار.

**إذا تقاطع وتران عند نقطة في دائرة، فإن مساحة المستطيل المحتوى بالقطعتين الناتجتين من تقسيم الوتر الأول تكون مساوية لمساحة المستطيل المحتوى بالقطعتين الناتجتين من تقسيم الوتر الثاني [تعريف 2-4].**

**الإثبات** أنشئ التي فيها الوتران و المتقطعين عند نقطة. ندعي أن المستطيلين المحصورين بجزأي كل من الوترين متساويان في المساحة وسنثبت هذا الادعاء في أربع حالات.

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-41: [3-35]، الحالة 1

**الحالة 1**: إذا كانت نقطة التقاطع مركز ، . لذلك، .

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-42: [3-35]، الحالة 2

**الحالة 2**: افترض أن تمر عبر وأن لا تمر؛ افترض أيضًا أنهما يتقاطعان عند و .

أنشئ . لأن مقسمة بالتساوي عند و على غير تساوي عند ، حسب [2-5]

بما أن ،

لكن حسب [1-47]، وبالتالي

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-43: [3-35]، الحالة 2

لأن تمر عبر المركز وتقطع ، التي لا تمر عبر المركز بزاوية قائمة، و تنصف حسب [3-3]. لذلك ، وبالتالي،.

A picture containing diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-44: [3-35]، الحالة 3

3- أنشئ القطر لـ والذي يقطع بحيث ليست عمودية على .

أنشئ و و [1-11]. لأن مقطوعة عموديًا بـ حيث تمر عبر ، مُنصفة عند [3-3] ومقسمة بغير تساوي عند . حسب [2-5]، .

بإضافة إلى كل طرف من المعادلة وتطبيق [1-47]، نحصل على:

مرة أخرى، لأن منصفة عند ومقسمة بغير تساوي عند ، [2-5].

A picture containing diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-45: [3-35]، الحالة 3

يترتب على ذلك أن

4- افترض أن كلا الوترين لا يمران عبر المركز وأنهما يتقاطعان عند .

Shape

Description automatically generated

الشكل 3-2-46: [3-35]، الحالة 4

عبر ، أنشئ القطر . حسب الحالة 3، المستطيل و . لذلك، .

**اللازمة** 3-35-1. إذا قُسم وتر لدائرة عند أي نقطة داخل الدائرة، فإن المستطيل المحصور بجزئيه يساوي الفرق بين مربع نصف القطر ومربع القطعة المنشأة من المركز إلى نقطة التقسيم.

**اللازمة** 3-35-2. إذا كان المستطيل المحتوى بجزئي قطعة من القطعتين المتقاطعتين مساويًا للمستطيل المحتوى بجزئي القطعة الأخرى، فإن نهايات القطعتين الأربعة تكون على دائرة.

**اللازمة** 3-35-3. لأي المثلثين متساويي الزوايا، المستطيل المحتوى بضلعين غير متناظرين حول أي زاويتين متساويتين متساويان.

Shape, polygon

Description automatically generated

الشكل 3-2-47: [3-35]، لازمة. 3

**الإثبات** لنفترض أن و هما المثلثان متساويا الزوايا، وافترض وضعهما بحيث تكون الزوايا المتساوية عند متقابلة رأسيًا وأن الضلعين غير المتناظرين، و ، يكونان القطعة . عندها الضلعين غير المتناظرين ، يكونان القطعة . بما أنّ ، النقاط ، ، ، تقع على دائرة [3-21، لازمة. 1]. ومن ثم،  
 [3-35] .󠄀

**تمارين**

1- في أي مثلث، يكون المستطيل المحتوي بأي ضلعين مساويًا لمساحة المستطيل المحتوى بالعمود على الضلع الثالث وقطر الدائرة المحيطة.

2- المستطيل المحتوى بوتر قوس ووتر مكمله يساوي المستطيل المحتوى بنصف القطر ووتر ضعف مكمله.

3- إذا عُلِمَت قاعدة المثلث ومجموع أضلاعه، عُلم المستطيل المحتوى بالعمودين من نهايتي القاعدة على المنصف الخارجي للزاوية الرأسية.

4- إذا عُلِمَت القاعدة والفرق بين الأضلاع، عُلم المستطيل المحتوى بالعمودين من نهايتي القاعدة على المنصف الداخلي.

5- عبر إحدى نقطتي تقاطع دائرتين، أنشئ قاطع بشرط أن يُعلم المستطيل المحتوي بالوترين المقطوعين، أو يكون الأقصى.

6- إذا وصلنا و ، نجد أن المستطيل يساوي مساحة المستطيل المحتوى بنصف القطر و ؛ أي أنه يساوي المستطيل المحتوى بنصف القطر ومجموع و .

### القضية 3-36. مساحة المستطيلات المنشأة على مماس ونقطة خارج الدائرة.

**لأي دائرة ونقطة خارج الدائرة، إذا أنشئت قطعتين من النقطة إلى الدائرة، وكانت إحداهما تتقاطع مع الدائرة في نقطتين والأخرى مماس للدائرة، فإن مساحة المستطيل المحتوى بالقطعتين الجزئيتين من القطعة الأولى تساوي المربع على المماس.**

**الإثبات** أنشئ والنقطة خارج . ثم أنشئ المماس إلى عند ؛ أنشئ أيضًا بشرط أن تتقاطع مع الدائرة عند ومرة أخرى عند . ندعي أن . نثبت هذا الادعاء في حالتين.

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-48: [3-36]، الحالة 1

**الحالة 1**: تمر عبر .

أنشئ . لأن مُنصفة عند وخارجيًا عند ، فإن [2-6]. لأن مماس لـ و منشأة من المركز إلى نقطة التقاطع، قائمة [3-18]. ومن ثم حسب [1-47].

لذلك، . لكن ، ولذلك .

**الحالة 2**: لا تمر عبر .

Diagram

Description automatically generated

الشكل 3-2-49: [3-36]، الحالة 2

أنشئ العمود ؛ أيضا أنشئ ، ، . لأن ، قطعة عبر المركز، تقطع التي لا تمر عبر المركز عموديًا، يُنصف [3-3].

لأن مُنصف عند ومقسم خارجيًا عند ، نجد أن [2-6]. بإضافة إلى كل جانب، نحصل على:

لدينا أيضًا أن ، ويترتب على ذلك أن

بما أن ، ، ولذلك . 󠄀

**ملاحظة.** يمكن كتابة القضيتين [3-35] و [3-36] في شكل عبارة واحدة: المستطيل المحتوى بقطعتي أي وتر لأي دائرة ويمر عبر نقطة ثابتة ، سواء داخل أو خارج الدائرة، ثابت.

**الإثبات** افترض أن مركز الدائرة، أنشئ و و . لاحظ أن متساوي الساقين، و قطعة منشأة من رأسه إلى النقطة في القاعدة أو امتدادها.

يترتب على ذلك أن المستطيل يساوي الفرق بين مربعي و؛ لذلك، فهو ثابت.

**اللازمة** 3-36-1. إذا مدت القطعتين ، لتلتقيا عند ، وإذا كان المستطيل ، تكون النقاط و و و على دائرة (قارن [3-35، لازمة. 2]).

**اللازمة** 3-36-2. المماسان لدائرتين من أي نقطة في الوتر المشترك متساويان (قارن [3-17، # 6]).

**اللازمة** 3-36-3. الأوتار المشتركة لأي ثلاث دوائر متقاطعة تتقاطع (قارن [3-17، # 7]).

**تمارين**

1- إذا أنشئت القطعة من الرأس لـ الذي يقطع الممتدة إلى ويصنع الزاوية ، أثبت أن .

2- اثبت [لازمة. 3-36-1].

### القضية 3-37. مساحة المستطيلات المنشأة على مماس ونقطة خارج الدائرة .

**لأي دائرة ونقطة خارج الدائرة. إذا أنشئت قطعتين من النقطة إلى الدائرة، تتقاطع أولهما مع الدائرة في نقطتين، ومساحة المستطيل المحتوى بالقطعتين الجزئيتين للقطعة الأولى يساوي المربع الموجود على القطعة الثانية، عندها تكون الثانية مماس للدائرة.**

**الإثبات** إذا كان المستطيل () المحتوي بجزئي القاطع والمنشأتين من أي نقطة () خارج الدائرة () يساوي مساحة المربع الموجود على القطعة () المنشأة من نفس النقطة لتقابل الدائرة، ندعي أن هذه القطعة، التي تلتقي بالدائرة، مماس لتلك الدائرة.

A picture containing wire

Description automatically generated

الشكل 3-2-50: [3-37]

من ، أنشئ التي تمس [3-17]. أنشئ ، ، . حسب الفرضية، ؛ حسب   
[3-36]، . ومن ثم ، وبالتالي .

في المثلثين و : و ويتشاركان القاعدة . حسب [1-8]، ، ولذلك .

لكن قائمة لأن مماس [3-38]؛ بالتالي قائمة، ولذلك فإن مماس لـ [3-16].󠄀

**اللازمة** 3-37-1. لنفترض أننا أُعطينا دائرة ونقطة خارج الدائرة وأنشئت قطعتين من النقطة إلى الدائرة، تتقاطع أولهما مع الدائرة عند نقطتين. تكون الثانية مماسًا للدائرة، إذا وفقط إذا، كانت مساحة المستطيل المحتوى بالقطعتين الجزئيتين للقطعة الأولى مساوي للمربع الموجود على المماس.

**تمارين**

1- أنشئ دائرة تمر عبر أي نقطتين وتحقق الشرطين التاليين:

(أ) تمس أي خط؛

(ب) تمس أي دائرة.

2- أنشئ دائرة عبر أي نقطة وتمس أي خطين؛ أو تمس أي خط وأي دائرة.

3- أنشئ دائرة تمر عبر أي نقطة بحيث يكون مركزها على أي خط وتمس أي دائرة.

4- أنشئ دائرة عبر أي نقطتين وتقطع قوس لأي دائرة.

5- إذا كانت ، ، ، أربع نقاط متسامتة وكانت مماس مشترك للدائرتين اللتين قطراهما ، ،عندها اثبت أن المثلثين ، متساويا الزوايا.

## أسئلة الامتحان للفصل 3.

1- ما موضوع الفصل 3؟

2- عرف الدوائر المتساوية.

3- عرف الوتر.

4- متى يصبح القاطع مماسًا؟

5- ما الفرق بين القوس والقطاع؟

6- ما المقصود بزاوية القطع؟

7- إذا كان قوس الدائرة يساوي سدس المحيط كله فما مقدار زاويته؟

8- ما هي القطوع؟

9- ما المقصود بزاوية واقفة على قطع؟

11- ما هو الشكل الرباعي الدائري؟

12- كم عدد التقاطعات الممكنة بين خط ودائرة؟

13- كم عدد نقاط التقاطع الممكنة بين دائرتين؟

14- لماذا إذا تماست دائرتان في نقطة لا يمكن أن يكون لهما أي نقطة مشتركة أخرى؟

15- اذكر قضية تشمل [3-11] و [3-12].

16- ما القضية التي #16 حالة حدية لها؟

17- ما التعريف الحديث للزاوية؟

18- كيف يختلف التعريف الحديث للزاوية عن تعريف اقليدس؟

19- اذكر العلاقات بين [3-16] و [3-18] و [3-19].

20- ما هي القضايا التي [3-16] و [3-18] و [3-19] حالات حدية لها؟

21- كم عدد المماسات المشتركة الممكنة لدائرتان؟

22- ما مقدار مستطيل جزئي الوتر المنشأ عبر نقطة تبعد 3.65 م عن مركز دائرة نصف قطرها 4.25 م؟

24- لأي نقطة خارج محيط دائرة قطرها ميل وعلى بعد أقدام من المحيط، أثبت أن طول المماس المنشأ منها إلى الدائرة هو ميل.

25- وتران متوازيان لدائرة قياسهما 12 بوصة و16 بوصة على التوالي والمسافة بينهما 2 بوصة. أوجد طول القطر.

26- ما المحل الهندسي لمراكز جميع الدوائر التي تلامس أي دائرة في أي نقطة؟

27- ما الشرط الذي يجب استيفاءه حتى تمر دائرة بأربع نقاط؟

28- إذا كانت الزاوية على قطع من دائرة تساوي 1.5 زاوية قائمة، فأي جزء المحيط يكون القطع؟

29- اذكر مقلوب قضايا الفصل 3 المثبتة مباشرةً.

30- ما المحل الهندسي لنقاط المنتصف لأوتار متساوية في الدائرة؟

31- إذا كان نصفي قطر أي دائرتين هما و ، والمسافة بين مركزيهما هي . أوجد طول وترهم المشترك.

32- إذا كان شكل ذو عدد زوجي من الأضلاع مدرج في دائرة، اثبت أن مجموع مجموعة من الزوايا المتبادلة يساوي مجموع الزوايا المتبقية.

## تمارين الفصل 3

1- إذا تقاطع وتران في دائرة عموديًا، فإن مجموع مربعات أجزاءهما يساوي مربع القطر.

2- إذا وقف وتر من أي دائرة مقابل زاوية قائمة عند نقطة ثابتة، فإن مستطيل العمودين عليها من النقطة الثابتة ومن مركز الدائرة يكون ثابتًا. أيضًا، مجموع مربعي العمودين عليه من نقطتين ثابتتين أخريين (والتي يمكن العثور عليهما) ثابت.

3- إذا أنشئ خط عبر إحدى نقطتي تقاطع دائرتين متساويتين بشرط أن يلتقي بهما مرة أخرى في نقطتين، فإن هاتين النقطتين متساويتي البعد عن نقطة التقاطع الأخرى.

4- أنشئ مماس لدائرة بشرط أن يكون المثلث المتكون منه ومماسان ثابتان للدائرة:

(أ) الأقصى

(ب) الأدنى.

5- إذا أنشئت عبر نقطتي التقاطع و لأي دائرتين أي قطعتين ، بالتوازي مع بعضهما البعض ويلتقيان بالدائرتين مرة أخرى عند ، ، ، ، عندها نجد أن .

6- في كل مثلث، يكون منصف الزاوية الأكبر أصغر منصف.

7- الدوائر التي أقطارها الأضلاع الأربعة لأي رباعي دائري تتقاطع مرة أخرى في أربع نقاط تمر بها دائرة.

8- تحدد الرؤوس الأربع للشكل الرباعي الدائري أربعة مثلثات تشكل مراكزها العمودية (تقاطعات ارتفاعاتها) رباعيًا مساويًا للرباعي الأول.

9- إذا أنشئنا وترين مشتركين عبر إحدى نقطتي تقاطع دائرتين، فإن القطع التي تصل بين نهايتي هذه الأوتار تشكل زاوية معينة مع بعضها البعض.

10- إن المربع الموجود على العمودي من أي نقطة في محيط الدائرة على وتر التماس بين مماسين يساوي مستطيل العمودين من نفس النقطة على المماسين.

12- لأي أربع دوائر مبنية على أضلاع شكل رباعي بحيث تكون الأضلاع أقطار هذه الدوائر. اثبت أن الوتر المشترك لأي ضلعين متجاورين يوازي الوتر المشترك للضلعين الآخرين.

13- المستطيل المحتوى بالعمودين من أي نقطة في دائرة على أقطار شكل رباعي مدرج تساوي المستطيل المحتوى بالعمودين من نفس النقطة على أي ضلعين متقابلين.

15- إذا أنشئنا من ، إحدى نقطتي تقاطع دائرتين، أي خط يقطع الدائرتين مرة أخرى في و ، فإن المماسين يتقاطعان عند و بزاوية معينة.

16- إذا مر وتر لأي دائرة عبر أي نقطة، فإن المحل الهندسي لتقاطع المماسان عند النهايتين هو خط مستقيم.

18- اذكر واثبت القضية المشابهة لـ [3-17] للمنصف الخارجي للزاوية الرأسية.

19- المربع على القطر الخارجي لشكل رباعي دائري يساوي مجموع المربعين على المماسين من نهايتيه إلى الدائرة المحيطة.

20- إذا مست دائرة "متحركة" أي دائرة وخط، فإن وتر التماس يمر عبر نقطة معينة.

21- إذا كانت ، ، ثلاث نقاط على محيط دائرة، و ، و هما نقطتي المنتصف للقوسين ، ، وإذا تقاطعت القطعة مع الوترين ، عند و ، فإن .

22- إذا أُدرجت دائرة في شكل رباعي دائري، فإن الخطين الواصلين بين نقاط الاتصال متعامدان.

23- إذا أنشئ الوتر الأصغر من نقطة تقاطع قطري رباعي دائري، فإن هذه النقطة ستنصف جزء الوتر بين الضلعين المتقابلين للشكل الرباعي.

24- إذا علمت قاعدة المثلث وزاويته الرأسية والمنصف الداخلي أو الخارجي للزاوية الرأسية، أنشئ المثلث.

25- إذا أنشئنا، خلال نقطة المنتصف لأي قوس ، أي وتر قاطعًا عند ، فإن المستطيل قيمة ثابتة.

26- الدوائر الأربعة المحيطة بالمثلثات الأربعة المكونة من أربعة خطوط تمر عبر نقطة مشتركة.

27- إذا كانت ، ، ثلاث نقاط على الأضلاع الثلاثة للمثلث ، فإن الدوائر الثلاثة حول المثلثات ،  
 ، تمر عبر نقطة مشتركة.

28- إذا أعطيت موضع النقطة المشتركة في التمرين السابق، ستكون الزوايا الثلاث للمثلث معلومة، والعكس بالعكس.

29- ضع أي مثلث بشرط أن تمر أضلاعه الثلاث عبر أي ثلاث نقاط.

30- ضع أي مثلث بشرط أن تكون رؤوسه الثلاثة على أي ثلاثة خطوط.

31- أنشئ أكبر مثلث زواياه مساوية لزوايا أي مثلث، على الترتيب، بشرط أن تمر أضلاعه عبر أي ثلاث نقاط.

32- أنشئ أصغر مثلث زواياه مساوية لزوايا أي مثلث، بشرط أن تقع رؤوسه على أي ثلاثة خطوط.

33- أنشئ أكبر مثلث زواياه مساوية لزوايا أي مثلث، بشرط أن تمس أضلاعه أي ثلاث دوائر.

34- إذا مر ضلعان لأي مثلث عبر نقطتين ثابتتين، فإن الضلع الثالث يلامس دائرة ثابتة.

35- إذا مس ضلعان من أضلاع مثلث دائرتين ثابتتين، فإن الضلع الثالث يمس دائرة ثابتة.

36- أنشئ مثلث متساوي الأضلاع رأسه عند أي نقطة ونهايتي قاعدته على أي دائرة.

37- أنشئ مثلث متساوي الأضلاع رأسه عند أي نقطة ونهايتي قاعدته على أي دائرتين.

38- ضع أي مثلث، بشرط أن تمس أضلاعه الثلاث ثلاث دوائر.

39- أحط مربع حول أي شكل رباعي.

40- ادرج مربع في أي شكل رباعي.

41- أنشئ الدوائر التالية:

(أ) العمودية (تقطع بزاوية قائمة) على أي دائرة وتمر عبر أي نقطتين؛

(ب) عمودية على دائرتين أخريين، وتمر عبر أي نقطة؛

(ج) عمودية على ثلاث دوائر أخريات.

42- إذا أنشئنا من نهايتي قطر لنصف دائرة وترين و اللذين يلتقيان عند ، فسنجد أن  
 .

43- إذا كان رباعي دائري، وإذا أنشئنا أي دائرة تمر عبر النقطتين و ، وأخرى عبر و ، وثالثة عبر و ، ورابعة عبر و ، فإن هذه الدوائر تتقاطع على التوالي عند أربع نقاط أخرى ، ، ، ، والتي تشكل رباعيًا دائريًا آخر.

44- إذا كان مثلث متساوي الأضلاع، فما هو المحل الهندسي لنقطة ، إذا كانت

45- في أي مثلث، إذا علمت مجموع أو الفرق بين أي ضلعين والزاوية المكونة بهذين الضلعين من حيث القياس والموضع، فإن المحل الهندسي لمركز الدائرة المحيطة هو خطًا مستقيمًا.

46- أنشئ دائرة:

(أ) عبر أي نقطتين تنصفان محيط دائرة أخرى؛

(ب) عبر أي نقطة تنصف محيط أي دائرتين.

47- أوجد المحل الهندسي لمركز دائرة تنصف محيط أي دائرتين.

48- أنشئ دائرة تنصف محيط أي ثلاث دوائر.

49- إذا كان عمودي من أي نقطة في نصف الدائرة على القطر ، تمس عند و عند ونصف الدائرة عند ، اثبت أن:

(أ) النقاط ، ، متسامتة؛

(ب) .

50- إذا أعطيت مثلث منفرج الزاوية، أنشئ من الزاوية المنفرجة إلى الضلع المقابل قطعة تقسم الضلع إلى جزأين مربعهما يساوي المستطيل المحتوى بجزأي الضلع المقابل.

51- إذا كانت نقطة خارج دائرة مركزها وكانت القطعتان المتعامدتان المارتان عبر يقطعان الوترين ، ، اثبت أن .

52- مجموع المربعات على أضلاع المثلث يساوي ضعف مجموع المستطيلات المُحتويات بكل عمود والجزء بين الرأس المناظر والمركز العمودي. وأيضًا يساوي مطروحًا منه مجموع مربعات المسافات من المركز العمودي إلى الرؤوس.